FONCTIONS CONTINUES NULLE-PART DÉRIVABLES :

Th : Soit A l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}([0;1];\mathbb{R})$ qui ne sont dérivable en aucun point de $[0;1]$. Alors A contient un G_δ dense (i.e une intersection dénombrable d'ouverts qui sera dense).

Ref : QZ

(B ensemble des fonctions continues dérivables en au moins un point)

Notons $B = A^c$. Remarquons également que si f est dérivable en un point x_0, $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ est borné au voisinage de $h=0$ (ceci étant dû à l'existence de cette limite)

Notons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_n = \{ f \in \mathcal{C}^0([0;1];\mathbb{R}) \mid \exists x \in [0;1], \forall y \in [0;1], |f(x)-f(y)| \leq n|x-y| \}$

Par la remarque précédente, $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

Comme $(\mathcal{C}^0([0;1];\mathbb{R}); \|\cdot\|_\infty)$ est complet, par Baire, si on montre que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, F_n fermé et $\mathring{F_n} = \emptyset$, alors $\overset{\circ}{\overbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n}} = \emptyset$ donc en particulier $\mathring{B} = \emptyset$ et alors $\bar{A} = \mathcal{C}^0([0;1];\mathbb{R})$ (plus précisément, A contiendra un G_δ dense : $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n^c$).

Il suffit donc de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, F_n est fermé et $\mathring{F_n} = \emptyset$:

- **F_n fermé** : Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions de F_n qui converge vers une fonction f, i.e $\|f_k - f\|_\infty \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Comme chaque f_k est continue, par convergence uniforme, f est également continue.

Par chaque $k \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_k \in [0;1], \forall y \in [0;1], |f_k(x_k) - f_k(y)| \leq n|x_k - y|$ (car $f_k \in F_n$). $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est donc une suite bornée ($\in [0;1]^{\mathbb{N}^*}$), donc par Bolzano-Weierstraß, $\exists$ une sous-suite de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ qui converge vers $x_0 \in [0;1]$ (Cette sous-suite sera encore noté $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ par commodité).

Supposons désormais que (*) : $\lim_{k\to\infty} f_k(x_k) - f_k(y) = f(x_0) - f(y)$: on a alors $f \in F_n$: en effet, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $|f_k(x_k) - f_k(y)| \leq n|x_k - y|$ donc par passage à la limite dans cette inégalité, $|f(x_0) - f(y)| \leq n|x_0 - y|$ (d'où $f \in F_n$ en prenant l'élément x_0 dans la déf

Reste alors à montrer (*):

$$f_n(x_n) - f_n(y) - (f(x_0) - f(y)) = \underbrace{f_n(x_n) - f(x_k)}_{(1)} + \underbrace{f(x_k) - f(x_0)}_{(2)} + \underbrace{f(y) - f_n(y)}_{(3)}.$$

(1) et (3) $\xrightarrow[h\to\infty]{} 0$ car (1) et (3) $\leq \|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[0;1]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[h\to\infty]{} 0$.

(2) $\xrightarrow[h\to\infty]{} 0$ par continuité de f.

Ce qui prouve (*).

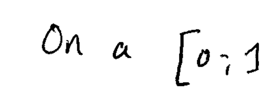
- $\underline{\underline{\mathring{F_n} = \emptyset}}$: On va montrer que $\forall f \in F_n, \forall \varepsilon > 0, B(f;\varepsilon) \cap F_n^c \neq \emptyset$, i.e

$\exists g \in \mathcal{C}^0([0;1];\mathbb{R}), \|f-g\|_\infty < \varepsilon$ et $\exists x \in [0;1], \forall y \in [0;1], |g(x) - g(y)| > n|x-y|$. (**)

Tout d'abord, d'après le théorème de Weierstraß, $\exists P \in \mathbb{R}[X], \|f - P\|_\infty < \varepsilon$ (densité des polynômes dans les fonctions continues sur un compact).

Notons $M = \sup_{x\in[0;1]} |P'(x)|$. $\exists N \in \mathbb{N}, N\varepsilon \geq 2(M+n+1)$

On a $[0;1] = \bigcup_{k=0}^{N-1} \left[\frac{k}{N};\frac{k+1}{N}\right]$. Notons g_0 la fonction $\frac{1}{N}$-périodique sur $[0;1]$ définie sur $[0;\frac{1}{N}]$ par $g_0(x) = \frac{\varepsilon N x}{2}$ sur $[0;\frac{1}{2N}]$, $g_0(x) = \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon N x}{2}$ sur $[\frac{1}{2N};\frac{1}{N}]$



en particulier $g_0 \in \mathcal{C}^0([0;1];\mathbb{R})$ et g_0 est dérivable sur $[0;1]$ sauf en un nombre fini de points. De plus, si g_0 est dérivable en x_0 alors $|g_0'(x_0)| = \frac{\varepsilon N}{2}$. on a également $\|g_0\|_\infty = \frac{\varepsilon}{4}$.

Posons désormais $g = P + g_0$. $g \in \mathcal{C}^0([0;1];\mathbb{R})$. De plus $\|f-g\|_\infty \leq \|f-P\|_\infty + \|g_0\|_\infty \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/4 < \varepsilon$.

Reste à montrer (**): or, $\forall x,y \in [0;1]$, $|g(x) - g(y)| \geq \underbrace{|g_0(x) - g_0(y)|}_{(1)} - \underbrace{|P(x) - P(y)|}_{(2)}$.

Pour $x \in [0;1]$, $\exists y \in [0;1]$ tq $(1) \geq (M+n+1)|x-y|$, car $\exists k \in [0;N-1]$, $x \in \left[\frac{k}{N};\frac{k+1}{N}\right]$: Plus précisément, $x \in \left]\frac{k}{N} + \frac{1}{2N};\frac{k+1}{N}\right]$ ou $\left[\frac{k}{N};k + \frac{1}{2N}\right]$

Pour y dans le même intervalle que x, $|g_0(x) - g_0(y)| = \frac{\varepsilon N}{2}|x-y| = (M+n+1)|x-y|$.
(fonction affine sur chacun de ces intervalles).

enfin, $\forall x,y \in [0;1]$, $(2) \leq M|x-y|$ (Inégalités des accroissements finis, $M = \|P'\|_\infty$.)

donc $(1) - (2) \geq (n+1)|x-y| > n|x-y|$ ce qui termine la démonstration.